H(jω)=M(ω)+jQ(ω)   T=H

lac1101

FR01

ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Частотная характеристика представляет зависимость передачи от частоты.

Так как на каждой частоте передача – это комплексное число, модуль которого – отношение амплитуд, а аргумент – разность фаз, то

$$T(j\omega)=A(\omega)\,e^{j\varphi(\omega)}$$

комплексная передача — амплитудная частотная характеристика — фазовая частотная характеристика

$$T(j\omega)=P(\omega)+jQ(\omega)$$

действительная частотная характеристика — мнимая частотная характеристика

$P(\omega)$ – синфазная передача
$Q(\omega)$ – квадратураная передача

Единственный источник комплексности это $j\omega$, поэтому целесообразно при рассчете частотных характеристик находить <u>передаточную функцию</u> $T(s)$, а затем подставлять $s \leftarrow j\omega$

FR02

Для рассчета $T(s)$:

 $Y=sC$ $Y=\frac{1}{sL}$

Так как $T(s)$ не содержит мнимых единиц, то

$T(-j\omega)=T^*(j\omega)$ (* – комплексно сопряженное)

и

$T^*(j\omega)=P(\omega)-jQ(\omega)$
$T(-j\omega)=P(-\omega)+jQ(-\omega)$

$P(-\omega)=P(\omega)$ – четная функция
$Q(-\omega)=-Q(\omega)$ – нечетная функция

Также $T^*(j\omega)=A(\omega)e^{-j\varphi(\omega)}=A(-\omega)\,e^{j\varphi(-\omega)}$

$A(\omega)$ – четная функция
$\varphi(\omega)$ – нечетная функция

Следовательно, для представления $A(\omega)$, $\varphi(\omega)$, $P(\omega)$, $Q(\omega)$ достаточно не отрицательных значений частот ω .

NB! $A(\omega)$ – не отрицательная
$\varphi(\omega)$ имеет значения в одном из диапазонов шириной в 2π (например: $-\pi<\varphi<\pi$, $0<\varphi<2\pi$,...)

FR03

В связи с тем, что при каскадном соединении блоков $\underbrace{\to \boxed{T_1} \to \boxed{T_2}}_{T} \to$

общая частотная характеристика является произведением частотных характеристик отдельных блоков $T(j\omega)=T_1(j\omega)\times T_2(j\omega)$

а графики довольно сложно умножать, но намного проще складывать, здесь используется логарифмирование, которое заменяет действие умножение (деление) на действие сложение (вычитание).

$\log T(j\omega)=\log A(\omega)+j\varphi(\omega)$ откуда для соединения имеем

$$\begin{cases}\log A(\omega)=\log A_1(\omega)+\log A_2(\omega)\\ \varphi(\omega)=\varphi_1(\omega)+\varphi_2(\omega)\end{cases}$$

Также более удобным является использование здесь логарифмической частотной оси графика (далее это станет более явным).

<u>Логарифмическая частотная шкала</u>

Чтобы логарифмировать, аргумент должен быть безразмерным. В связи с этим выбираем какую-то частоту ω_0 и рассматриваем величину $u=\log\frac{\omega}{\omega_0}$

-2	-1	0	1	2	u
0.01ω	0.1ω	ω	10ω	100ω	ω

$\underbrace{\omega \quad 10\omega}_{\text{1 декада}}$

NB! На логарифмической оси нет частоты $\omega=0$!!!

FR04

На этой оси используются следующие единицы:

1) 1dec (1 декада) – отношение частот равно 10
2) 1oct (1 октава) – отношение частот равно 2 (не восьми, как многие считают!)

Очень важное соотношение:

$\log_{10}2 \approx 0.30103$ (на практике 0.3)

или 2 раза, т.е. 1oct ≈ 0.3dec

Важное соотношение:

$\log_{10}3 \approx 0.4772$

на практике 3 раза – 0.48

Еще некоторые соотношения:

0.5dec – $\sqrt{10}$ раз ≈ 3.16
0.1dec – $\sqrt[10]{10}$ раз ≈ 1.26
2dec – 100 раз
3dec – 1000 раз

4 раза ~ 0.6dec   5 раз ~ 0.7dec
8 раз ~ 0.9dec   25 раз ~ 1.4dec

1dec ~ 3.33oct

Если $\varepsilon<<1$, то вблизи единицы:

$\log_{10}(1+\varepsilon)\approx\varepsilon*\log_{10}e\approx 0.43\,\varepsilon$ [dec]

FR05

<u>Логарифмическая амплитудная шкала</u>

Амплитуда может быть безразмерной, в противном случае пронормируем значением A_0 (как и частоту)

A	$L=\log A$	
100	2	40dB
10	1	20dB
1	0	0dB
0.1	−1	−20dB
0.01	−2	−40dB

(от 1 до 10: 1 декада)

NB! Амплитуды A=0 на этой оси нет! (как и $\omega=0$ на оси частот нет!)

Декада называется здесь иначе

10 korda – 2B (bell)

На практике обычно используются децибеллы

10 korda – 20dB (=1 dekaad)

(в технике связи используется также: e раз – 1Np (непер))

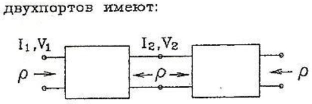
Соотношения:

10 korda – 20dB   0.1 korda – −20dB
100 korda – 40dB   0.01 korda – −40dB
1000 korda – 60dB   0.001 korda – −60dB
2 korda – 6dB
$\sqrt{2}$ korda – 3dB ← особо важное число
5 korda – 14dB   1dB ~ 1.12 korda
$\sqrt{10}$ korda – 10dB   2dB ~ 1.26 korda

Если $\varepsilon<<1$, то передача вблизи единицы:

FR06

10 раз и 2B происходят из техники связи, где при каскадном соединении согласованных двухпортов имеют:



$V_1=\rho I_1$ $V_2=\rho I_2$

$P_1=\frac{1}{\rho}V_1^2=\rho I_1^2$ $P_2=\frac{1}{\rho}V_2^2=\rho I_2^2$

$\frac{P_2}{P_1}=\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2=\left(\frac{I_2}{I_1}\right)^2$ – любой из трех определяет остальные

В связи с этим говорят просто о передаче:

если $\frac{P_2}{P_1}=10$ – 1B, то $\frac{V_2}{V_1}=\frac{I_2}{I_1}=\sqrt{10}$ – 1B

если же $\frac{V_2}{V_1}=\frac{I_2}{I_1}=10$ – 2B, то $\frac{P_2}{P_1}=100$

Последний вариант (для V или I) обычно и [illegible] lac1102

FR07

Если в цепи лишь безынерционные компоненты, а также C и L, то передача дробнорациональна:

$$T(s)=\frac{a_0 s^m+a_1 s^{m-1}+\ldots+a_m}{b_0 s^n+b_1 s^{n-1}+\ldots+b_n}$$

которую можно представить и так:

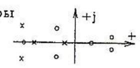
$$T(s)=K\frac{(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)}$$

где z_i – нули числителя, они же нули передачи
p_j – нули знаменителя, они же полюса передачи $T(s)$

Так как все (a_i, b_j) коэффициенты $T(s)$ – действительные, то нули z_i и полюса p_j могут быть:

1) действительные
2) комлексносопряженные пары

Поэтому диаграмма нулей-полюсов симметрична относительно действительной оси.



Логарифмируя $T(s)$ получим:

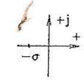
$$\log T(s)=\log K+\sum_{i=1}^{m}\log(s-z_i)-\sum_{j=1}^{n}\log(s-p_j)$$

Таким образом: логарифм передачи является суммой логарифмов элементарных компонентов $\log(s-w)$

FR08

Поэтому рассмотрим частотные характеристики этих элементарных звеньев.

Рассмотрим полюс:



Пусть $T(s)=\frac{1}{s+\sigma}$ тогда $T(j\omega)=\frac{1}{j\omega+\sigma}$

$$\log T(j\omega)=-\log(j\omega+\sigma)=-\log\sqrt{\omega^2+\sigma^2}-j\arg(j\omega+\sigma)$$

и $\log A(\omega)=-\log\sqrt{\omega^2+\sigma^2}$

$$\varphi(\omega)=-\arg(j\omega+\sigma)$$

Рассмотрим амплитуду: так как суммируются ω^2 и σ^2 то можно различить две зоны:

1) $\omega<<\sigma \Rightarrow \omega^2<<\sigma^2 \Rightarrow \log A(\omega)\approx-\log\sqrt{\sigma^2}=$
не очень много / очень много
$=-\frac{1}{2}\log\sigma^2=-\log|\sigma|$ const.

2) $\omega>>\sigma \Rightarrow \omega^2>>\sigma^2 \Rightarrow \log A(\omega)\approx-\log\sqrt{\omega^2}=$
$=-\log\omega=-u$ линейная

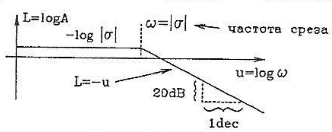
то есть, если $\omega<<\sigma$, то $L(u)=-\log|\sigma|$ const.
а если $\omega>>\sigma$, то $L(u)=-u$

Соответствующие графики-прямые, которые пересекаются, если

$$-u=-\log|\sigma| \quad u=\log|\sigma| \quad \omega=|\sigma|$$

Состоящий из этих двух отрезков график называется <u>асимптотическая логарифмическая амплитудно-частотная характеристика.</u>

FR09



Следовательно, если u растет на одну единицу (1dec), то L уменьшается 1 единицу (20 dB) поэтому говорим, что наклон $-20\frac{dB}{dec}$

NB! Такой простой график – результат использования логарифмических осей!

($A(\omega)\sim\frac{1}{\omega}$, гипербола, т.е. кривая
$\log A\sim-u$ – прямая)

Каждая степенная зависимость превращается в логарифмических осях в прямую:

$$\log\omega^\alpha=\alpha\log(\omega)=\alpha{*}u \quad \text{или} \quad \alpha{*}20\frac{dB}{dec}$$

то есть $\frac{1}{\omega}: -20\frac{dB}{dec}$ $\quad\frac{1}{\omega^2}: -40\frac{dB}{dec}$

$\omega: 20\frac{dB}{dec}$ $\quad\omega^2: 40\frac{dB}{dec}$ и т.д.

Точная амплитудно-частотная характеристика отличается от асимптотической в окрестностях $\omega=1$ (т.е. где $\omega^2\approx\sigma^2$)

FR10

Максимальная погрешность как раз при $\omega=|\sigma|$, где неучтенная часть составляет 50%.

$$-\log\sqrt{\sigma^2+\sigma^2}=-\log\sqrt{2\sigma^2}=-\log\sqrt{2}-\log\sigma$$

$\sqrt{2}$ раз это 3 dB, то есть максимальное различие −3 dB ($1/\sqrt{2}\approx0.7$ от асимпотической)

Оценим погрешность на растоянии 1 декада:

$\omega=0.1\sigma$ $\qquad\qquad \omega=10\sigma,\ \sigma=0.1\omega$

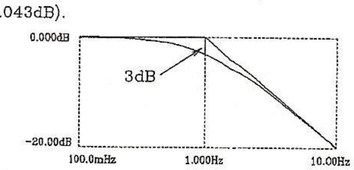
$-\log\sqrt{0.01\sigma^2+\sigma^2}=$ $\qquad -\log\sqrt{\omega^2+0.01\omega^2}=$

$=-\log\sqrt{1.01}-\log|\sigma|$ $\qquad =-\log\sqrt{1.01}-\log\omega$

$$-\log\sqrt{1.01}\approx-\log\underbrace{1.005}_{\varepsilon}=-\underbrace{0.043\text{dB}}_{8.7\varepsilon}\quad[4.3\text{mB}]$$

$$\sqrt{1+\varepsilon}\approx1+\frac{\varepsilon}{2}$$

Следовалельно на расстоянии в 1 декаду от частоты среза погрешность очень мала (0.5% амплитуды, т.е. 0.043dB).

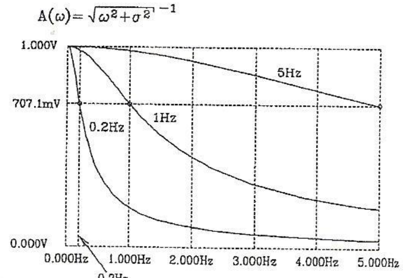


FR11

Обычно на практике довольствуются асимптотическими характеристиками (т.е. 3 dB не считают за болшую погрешность)

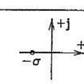
NB! На логарифмических осях всего один график для всех функций с одним полюсом, который может сдвигаться вверх-вниз (изменения амплитуды) или вправо-влево (изменения частоты среза). В натуральных осях это были бы все разные графики (для разных частот среза).

$$A(\omega)=\sqrt{\omega^2+\sigma^2}^{\,-1}$$

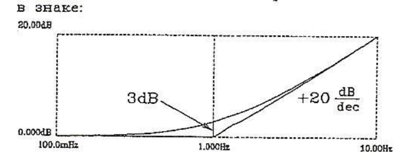


FR12

Рассмотрим ноль:



Пусть $T(s)=s+\sigma$
тогда $\log A(\omega)=\log\sqrt{\omega^2+\sigma^2}$
и сравнение с полюсом дает различие лишь в знаке:



Выводы:

1. Частотой среза ω_i является абсолютное значение $|\sigma_i|$ нуля (полюса).
2. Если частота среза соответствует
   1) нулю, то наклон амплитудно-частотной характеристики увеличивается на 20 [dB/dec]
   2) полюсу, то наклон амплитудно-частотной характеристики уменьшается на 20 [dB/dec]
3. Между двумя частотами среза наклон $n{*}20\frac{dB}{dec}$, что соответствует частотной характеристике $C{*}s^n$, где константа C определяет местоположение прямой.

Для сложной передаточной функции целесообразно при конструировании частотной характеристики найти эквивалентные передаточные функции для каждой зоны между двумя соседними частотами среза.

Идея базируется на упрощении, которым уже выше пользовались:

$$s+\sigma \begin{cases} \to \cancel{s}+\sigma, & \text{если } \omega<|\sigma| \\ \to s+\cancel{\sigma}, & \text{если } \omega>|\sigma| \end{cases}$$

Пример:

$$T(s)=\frac{20(s+1)(s+1000)}{(s+10)(s+100)}$$

Диаграмма нулей-полюсов (без учета масштаба).

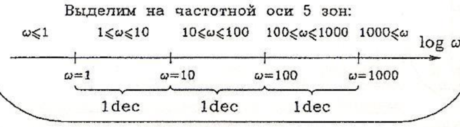
$z_1=-1 \quad z_2=-1000$

$p_1=-10 \quad p_2=-100$

Частоты среза:

$\omega_{z_1}=1, \quad \omega_{z_2}=1000, \quad \omega_{p_1}=10 \quad \omega_{p_2}=100$

Выделим на частотной оси 5 зон:



Определим для каждой зоны эквивалентную передаточную функцию:

$\omega\leqslant 1$: $\quad \frac{20(\cancel{s}+1)(\cancel{s}+1000)}{(\cancel{s}+10)(\cancel{s}+100)}=20 \qquad$ 26dB

$1\leqslant\omega\leqslant 10$: $\quad \frac{20(s+\cancel{1})(\cancel{s}+1000)}{(\cancel{s}+10)(\cancel{s}+100)}=20s \qquad 20\,\frac{dB}{dec}$

$10\leqslant\omega\leqslant 100$: $\quad \frac{20(s+\cancel{1})(\cancel{s}+1000)}{(s+\cancel{10})(\cancel{s}+100)}=200 \qquad$ 46dB

$100\leqslant\omega\leqslant 1000$: $\quad \frac{20(s+\cancel{1})(\cancel{s}+1000)}{(s+\cancel{10})(s+\cancel{100})}=\frac{20000}{s} \qquad -20\,\frac{dB}{dec}$

$1000\leqslant\omega$: $\quad \frac{20(s+\cancel{1})(s+\cancel{1000})}{(s+\cancel{10})(s+\cancel{100})}=20 \qquad$ 26dB

Теперь можем соответствующие отрезки зарисовать в произвольном порядке. Например на отрезке

$$1<\omega<10$$

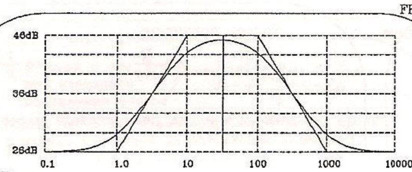
получим на его концах следующие значения:

$\omega=1 \qquad \tilde{T}=20s\big|_{s=j}=20j \qquad A(1)=20 \quad$ (26dB)

$\omega=10 \qquad \tilde{T}=20s\big|_{s=10j}=200j \qquad A(10)=200 \quad$ (46dB)

И наклон действительно получается

$$\frac{(46-26)\,dB}{1dec}=20\,\frac{dB}{dec}$$



Точная характеристика рассчитывается по отдельным частотам.

Рассчитаем, например, передачу в середине среднего отрезка, т.е. на частоте которая является геометрической средней частот ω_2 и ω_3.

$$\omega'=\sqrt{\omega_2\,\omega_3}=\sqrt{1000}=10\sqrt{10} \qquad \omega^2=1000$$

$$A(10\sqrt{10})=\frac{20\sqrt{(1000+1)(1000+1000^2)}}{\sqrt{(1000+10^2)(1000+100^2)}}=$$

$$=\frac{20{*}1000}{1000}\sqrt{\frac{1.001{*}1001}{1.1{*}11.1}}\approx 20\sqrt{\frac{100.2}{1.1{*}1.1}}\approx$$

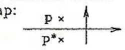
$$\approx 200\,\frac{\sqrt{1.002}}{1.1}\approx\frac{200{*}1.001}{1.1}\approx 181.8$$

В децибеллах: $\underset{(200)}{46}+\underset{(1.001)}{0.0087}-\underset{(1.1)}{0.9}=45.1dB$

Под влиянием полюсов (ω_2 и ω_3) действительная амплитуда на 0.9dB ниже. Влияние нулей (ω_1 и ω_4) незначительно (т.к. на растоянии в 1.5 dec)

Комплексные корни

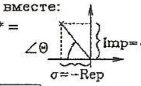
Так как комплексные корни встречаются лишь в виде комплексносопряженных пар:



$$(s-p)(s-p^*)$$

то будем рассматривать эту пару вместе:

$$(s-p)(s-p^*)=s^2-(p+p^*)s+pp^*=$$
$$=s^2-2(\mathrm{Re}\,p)s+|p|^2$$



Если $p=-\sigma+j\omega_0$, то получим:

$$s^2+2\sigma s+\underbrace{\sigma^2+\omega_0^2} \qquad \omega_1=\sqrt{\sigma^2+\omega_0^2}$$

$|p|^2=\omega_1^2$

Выберем в качестве единицы (т.е. пронормируем)

$$\bar{s}=\frac{s}{\omega_1} \qquad \text{или} \qquad s=\omega_1\bar{s}$$

$$\bar{s}^2\omega_1^2+2\sigma\bar{s}\omega_1+\omega_1^2=\omega_1^2\,\underline{\left(\bar{s}^2+2\,\frac{\sigma}{\omega_1}\,\bar{s}+1\right)}$$

В дальнейшем будем рассматривать лишь эту скобку. ($\omega_1^2=$ const.) Обозначив: $\beta=\frac{\sigma}{\omega_1}=\cos\Theta$

Получим (вернем старое обозначение)

$s^2+2\beta s+1$ (частота 1.0 на ω_1)

Теперь частотная характеристика зависит от одного параметра – коэффициента затухания β, что равнозначно с углом Θ

При $\beta=0 \quad \Theta=90^\circ$ – мнимые корни

$\beta=1 \quad \Theta=0^\circ$ – действительные корни.

Замена $s\leftarrow j\omega$ дает:

$$(j\omega)^2+2\beta j\omega+1=1-\omega^2+j\cdot 2\beta\omega$$

Отсюда амплитуда и фаза:

$$A^2(\omega)=(1-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2$$
$$\varphi(\omega)=\arg(1-\omega^2+j\cdot 2\beta\omega)$$

На частоте $\omega=1$ (действительная частота ω_1) получим передачу $j\cdot 2\beta$ (чисто мнимая!)

$$A(1)=2\beta \qquad \varphi(1)=\frac{\pi}{2}$$

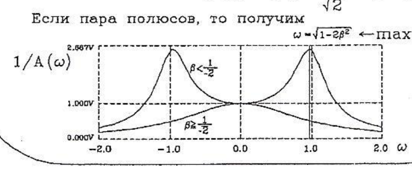
Экстремумы амплитуды следующие:

$$\frac{d}{d\omega}\left(A^2(\omega)\right)=-2(1-\omega^2)\cdot 2\omega+8\beta^2\omega=$$
$$=4\omega^3+(8\beta^2-4)\omega=4\omega(\omega^2+(2\beta^2-1))=0$$

$\omega_0=0, \quad \omega_{\pm 1}=\pm\sqrt{1-2\beta^2}$ они имеются, если

$$1-2\beta^2>0, \quad \beta<\frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\Theta=45^\circ)$$

Если пара полюсов, то получим



$$\log\left.\frac{1}{s^2+2\beta s+1}\right|_{s=j\omega}=-\log\sqrt{(1-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}+j\varphi(\omega)$$

рассмотрим позже

$$L=-\frac{1}{2}\log[(1-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2]$$

Из скобки видно, что если

$\omega<<1$ слегка $\qquad (1-\omega^2)^2+\underbrace{4\beta^2\omega^2}_{\text{также мала}}\approx 1$ (мала)

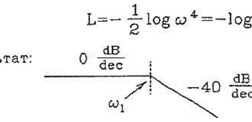
$\omega>>1$ слегка $\qquad (1-\omega^2)^2+\underbrace{4\beta^2\omega^2}_{\text{меньше, чем }\omega^4}\approx\omega^4$ (ω^4 очень велика)

Следовательно на низких частотах: $L=\log 1=0$

на высоких частотах:

$$L=-\frac{1}{2}\log\omega^4=-\log\omega^2=-2u$$

Результат:



NB! Эта асимптотическая частотная характеристика не зависит от β.

lac1104

FR19

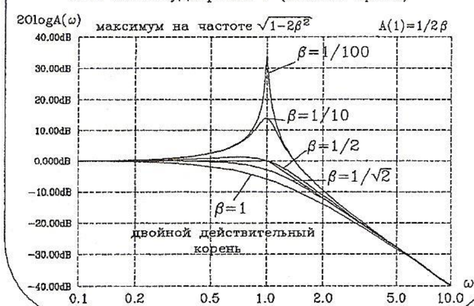
Поправка может быть в обоих направлениях:

$$(1-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2=1-2\omega^2+\omega^4+4\beta^2\omega^2=$$
$$=\omega^4+(4\beta^2-2)\omega^2+1$$

$\omega>>1$ $\omega<<1$

асимптоты

Если $\beta=1/2$, то $\omega^4-\omega^2+1$ и на частоте $\omega=1$ амплитуда равна 1 (частота среза!)



FR20

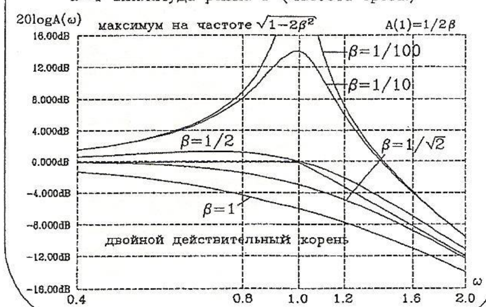
Поправка может быть в обоих направлениях:

$$(1-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2=1-2\omega^2+\omega^4+4\beta^2\omega^2=$$
$$=\omega^4+(4\beta^2-2)\omega^2+1$$

$\omega>>1$ $\omega<<1$

асимптоты

Если $\beta=1/2$, то $\omega^4-\omega^2+1$ и на частоте $\omega=1$ амплитуда равна 1 (частота среза!)



Fr21

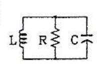
Расположение корней часто характеризуют фактором Q или добротностью.

$$T(s)=\frac{1}{s^2+\frac{s}{Q}+1}$$

Видно, что $Q=\frac{1}{2\beta}$ т.е. амплитуда на частоте среза относительно асимптоты.

Простейшие цепи, где возникают комплексные полюса:

1



Нормируя так, чтобы $L_n=1$ и $C_n=1$ следует выбрать следующие величины:

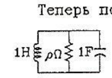
$L_0=L$, $C_0=C$ $\qquad \omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$, $R_0=\sqrt{\frac{L}{C}}$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{HF}}\right]=\left[\frac{1}{\sqrt{\Omega\cdot s\cdot S\cdot s}}\right]=\left[\frac{1}{s}\right] \qquad \left[\sqrt{\frac{H}{F}}\right]=\left[\sqrt{\frac{\Omega s}{Ss}}\right]=[\Omega]$$

(Все частоты уменьшаются в ω_0 раз, все сопротивления уменьшаются в R_0 раз, все отрезки времени увеличиваются в ω_0 раз.)

FR22

Теперь получаем:



$\rho=\frac{R}{R_0}$ $\qquad \gamma=\frac{1}{\rho}=\frac{R_0}{R}$

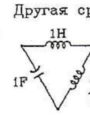
$\rho=\omega L=\frac{1}{\omega C}$ на резонансной частоте

Определитель $D=\frac{1}{s}+\gamma+s=\frac{s^2+\frac{1}{\rho}s+1}{s}$

$\underline{Q=\rho}$ $\quad \left(Q=\frac{R}{\sqrt{L/C}}\right)$

Другая сруктура:

2



$$D=s\frac{1}{s}+s\gamma+\frac{1}{s}\gamma=$$
$$=\frac{s^2\gamma+s+\gamma}{s}=\frac{s^2+s/\gamma+1}{s/\gamma}$$

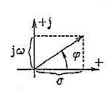
$\underline{Q=\gamma}$ $\quad \left(Q=\frac{\sqrt{L/C}}{R}\right)$

Структура 1 является параллельным колебательным контуром (высокая добротность предпологает большое сопротивление). Структура 2 является последовательным колебательным контуром (высокая добротность предполагает малое сопротивление).

FR23

ФАЗОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Рассмотрим $T(s)=\frac{1}{s+\sigma}$



$$\varphi(\omega)=-\arg(j\omega+\sigma)=-\arctan\frac{\omega}{\sigma}$$

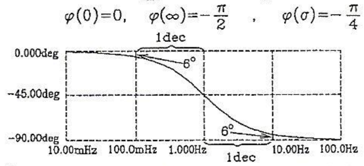
При логарифмической частоте эта функция симметрична относительно $\omega_0=\sigma$

$$\omega=\frac{\sigma}{k} \qquad\qquad \omega=\sigma k$$

$$\underbrace{\varphi\left(\frac{\sigma}{k}\right)=-\arctan\frac{1}{k} \qquad \varphi(\sigma k)=-\arctan k}_{\arctan\frac{1}{k}+\arctan k=\frac{\pi}{2}}$$

ehk $\quad \varphi\left(\frac{\sigma}{k}\right)+\varphi(\sigma k)=-\frac{\pi}{2}$

$$\varphi(0)=0, \quad \varphi(\infty)=-\frac{\pi}{2} \quad , \quad \varphi(\sigma)=-\frac{\pi}{4}$$



Фаза изменяется медленно: на расстоянии 1 декады

$\varphi(0.15)=-\arctan 0.1\approx-6^\circ$ $\left[\frac{6^\circ}{90^\circ}\sim 7\%\right]$

(амплитуда различалась на 0.5%)

FR24

Асимптотическую характеристику сложно конструировать (остается большая погрешность).

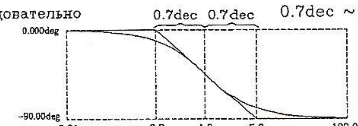
Одна из возможностей – касательная на частоте среза:

$$\frac{d\varphi}{du}=\frac{d\varphi}{d\omega}\circ\frac{d\omega}{du}=\frac{d}{d\omega}\left(-\arctan\frac{\omega}{\sigma}\right)\circ\frac{d}{du}\left(\sigma\circ 10^4\right)=$$
$$=\frac{-1}{1+(\omega/\sigma)^2}\circ\frac{1}{\sigma}\circ\sigma\circ\ln 10\circ 10^4\Big|_{\omega=\sigma}=$$
$$=\frac{-1}{1+1^2}\ln 10\circ 10^0=-\frac{\ln 10}{2}$$

При такой скорости изменения для получения сдвига фаз в $-\pi/2$ необходим отрезок длиной в

$$\frac{-\pi/2}{(-\ln 10)/2}=\frac{\pi}{\ln 10}=1.364\approx 1.4 \ [\mathrm{dec}]$$

Следовательно $\qquad$ 0.7dec ~ 5korda.



Это решение истинно, при $\omega<<\sigma$, $\omega\approx\sigma$ и $\omega>>\sigma$.

Погрешность на частотах среза: $\Delta\varphi=0.205=11.7^\circ$ ($\approx\arctan 0.2$) Довольно приблизительно!