Формула Бернулли: позволяет найти вероятность появления события A, при независимых испытаниях. $P_{kn} = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$, $q=1-p$

показательное распределение: если плотность распределения вероятностей

$f(x)=\begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x\geq 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$ $F(x)=\begin{cases} 1-e^{-\lambda x}, & x\geq 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$, где $F(x)=\int_0^x f(x)dx = -e^{-\lambda x}\Big|_0^x = 1-e^{-\lambda x}$

мат. ожидание $m_x=\frac{1}{\lambda}$

$m_x=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx = -x\cdot e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}dx = -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}$

$u=x$
$dv=e^{-\lambda x}dx$
$V=\int e^{-\lambda x}dx = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}$

дисперсия $D_x=\sigma_x^2=\frac{1}{\lambda^2}$

$R(t)=e^{-\lambda t}$ вероятность не отказа любой системы.

$F(t)=1-e^{-\lambda t}$ откажет

$D_x=M[x^2]-m_x^2$

$M[x^2]=\int_0^{\infty} x^2\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda x}dx=\frac{2}{\lambda^2}$, $D_x=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}$

среднекв. отклонение $\sigma_x=\sqrt{D_x}=\frac{1}{\lambda}$

ковариация – мера линейной зависимости двух случайных величин, если X Y независимые случайные величины, то она равна нулю.

СВДТ: $k_{xy}=\sum_i\sum_j (x_i-m_x)(y_j-m_y)P_{ij}$ СВНТ: $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)(y-m_y)f(x,y)dxdy$.

$k_{xy}=k_{yx}$

дисперсия СВ есть ковариация ее с самой собой

$D[X\pm Y]=D_x+D_y\pm 2k_{xy}$

$|k_{xy}|\leq \sigma_x\sigma_y$

ДСВ – конечное, либо бесконечное счетное множество значений

НСВ – заполняют некоторый интервал числовой оси

свойства плотности: $f(x)\geq 0$; $F(x)=P(X<x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$; $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$ (нормировка); $f(x)=F'(x) \Leftarrow$ Ф.Р.В

$P(\alpha<x<\beta)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ – вероятность попасть X на участке (α,β)

Вероятность попасть в точку СВНТ=0; условие нормировки площадь под всей кривой распр. равен 1

Теорема Чебышева I – случайная величина X с мат. ожиданием и дисперсией. Над СВ X проводится n независимых опытов, в результате которых она принимает значения $X_1 \to X_n$. Рассматривается среднее арифм. всех этих значений зависящих от n. $Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

СВ Y_n образуют последовательности, теорема утверждает, что Y_n сходится по вероятности к мат. ожиданию СВ X. СА значений сходится по вероятности к ее мат. ожиданию при $n\to\infty$

Т.Ч. II – неограниченная последовательность независимых X_1, X_2, X_n с различным M_x. Если все дисперсии ограничены сверху одним и тем же числом D, то разность между средним арифм. наблюдаемых значений и СА их мат. ожиданий сходится по вероятности к нулю.

$P(|X_n-a|<\varepsilon)>1-\delta$, где $X_n-a=\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}-m_x$

Монотонная — $Y = \varphi(x)$ $g(y) = f(\psi(y)) \cdot |\psi'(y)|$ $X = \psi(y)$ обратная.

Линейное преобразование сл. в. не изменяет вида закона распределения $Y = aX + b$, $a, b = const$

$X = \psi(y) = \frac{y-b}{a}$, $\psi'(y) = \frac{1}{a}$, $g(y) = f\frac{y-b}{a} \cdot \frac{1}{a}$

немонотонная: неоднозначная обратная фн: $X_1 = \psi_1(y)$ $X_n = \psi_n(y)$

$$g(y) = \sum_{k=1}^{n} f[\psi_k(y)] \cdot \psi_k'(y)]$$

Схемы выбора:

Сочетание $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ все возможные комбинации, отличающиеся 1 элементом, $C_n^m = C_n^{n-m}$, $C_n^0 + C_n^1 + C_n^n = 2^n$, $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$; $C_n^0 = 1$

Размещения $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ конечное упорядоченное множество без возвращения, но упорядочивание имеется

Сочетание с повторением C_{n+m-1}^m выбор с возвращением m элементов множества E без упоряд.

Размещения с повторением $W_n^m = n^m$ может содержать любой элемент $[1, n]$ раз

Оценка дисперсии ...! $\tilde{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$, $\tilde{D} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \tilde{m})^2}{n-1}$, $\tilde{D} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \tilde{m}^2\right)\frac{n}{n-1}$

при неизвестном мат. ожидании.

$\tilde{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2$

при известном Mx; a-параметр

σ-ср. кв. отклонение

Дисперсия СА n результатов измерений (от x_1 до x_n)

$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ $D[a] = D\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D[x_i] = \frac{n\sigma_x^2}{n^2} = \frac{\sigma_x^2}{n}$

В n раз меньше дисперсия отдельного результата измерений (3 свойство)

Мат. ожидание $m_x = M[x]$ $\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i p_i & \text{СВДТ} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx & \text{СВНТ} \end{cases}$

дисперсия $D_x = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^2 \cdot p_i & \text{СВДТ} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx & \text{СВНТ} \end{cases}$

начальный момент $a_k = M[X^k] = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i & \text{СВДТ} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k f(x) dx & \text{СВНТ} \end{cases}$

$np - q \le M_0 \le np + p$

$P(X < M_d) = P(X \geq M_0)$ $F(M_0) = \frac{1}{2}$

СВНТ

центр рассеивания $\mu_{ks} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k \cdot (y - m_y)^s f(x, y) dx dy$

Ковариация $k_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)(y - m_y) f(x, y) dx dy$

мода-точка максимума плотности распределения

медиана - равновероятное получение большего/меньшего значения

эксцесс - безразмерная величина

СВДТ

центр рассеивания $\mu_{ks} = \sum_i \sum_j (x_i - m_x)^k (y_j - m_y)^s p_{ij}$

ковариация $k_{xy} = \sum_i \sum_j (x_i - m_x)(y - m_y) p_{ij}$

$f(x)=\frac{a}{1+x^2} \quad x\in(-\infty;\infty)$

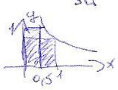
$a\cdot\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = a\cdot \operatorname{arctg} x\Big|_{-\infty}^{\infty} = 1$

$a\cdot\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=1$

$a=\frac{1}{\pi}$

$\left.\begin{matrix} x\in[0,1] \\ y\in[0,1]\end{matrix}\right\} \quad xy<\frac{1}{2} \quad y<\frac{1}{2x}$

$P(A)=\frac{S_m}{S_\Omega}=\frac{1}{2}+\int_{0,5}^{1}\frac{dx}{2x}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln x\Big|_{0,5}^{1}=\frac{1}{2}(1+\ln 2)$



$F(x)=\begin{cases}0, & x\leq 1\\ a(x-1)^2, & 1\leq x\leq 3\\ 1, & x>3\end{cases}$

1) меньше 2

$F(2)-F(1)=\frac{1}{4}$

2) неменьше 2,5

$F(3)-F(2,5)=1-\frac{9}{16}=\frac{7}{16}$

$\varphi(x)=F'(x)$ плотность распределения

$Z=X+Y$ (числа складываем, вероятность умножаем)

$Z=5X-2Y+3$, $D(X)=4$, $D(Y)=11$

$D(Z)=25\cdot 4+4\cdot 11+0=144$

хотябы один из 3 уч. имеет переплет. Всего 15, 5 в переплете

$P(A)=1-\frac{C_{10}^3}{C_{15}^3}=\frac{67}{91}$

только 1 сработает: $0,9\cdot 0,05+0,95\cdot 0,1=\ldots$

$(5/6)^n<0,3$

$n>6,6$

100 б, 5 выиг, берут 2. $P(A)=\frac{5}{100}\cdot\frac{2}{99}$

трое отобр. мужч. $P(A)=\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}$

$P=1-q^4=1-0,5^4=0,9375$

$P=1-q^3=0,875$

$q=0,5$

расположить за стол $7!\cdot 7!+7!\cdot 7!=2\cdot(7!)^2$

получит туз: $P(A)=\frac{48!\cdot 4!}{(12!)^4}:\frac{52!}{(13!)^4}$

нет апельсинов $P(A)=\frac{C_{12}^5\cdot C_{10}^5\cdot C_5^5}{C_{15}^5\cdot C_{10}^5\cdot C_5^5}$, по 1 $P(A)=\frac{C_{12}^4\cdot C_8^4\cdot C_4^4}{C_{15}^5\cdot C_{10}^5\cdot C_5^5}$

1 бомба: $P(A)=1-q_1\cdot q_2\cdot q_3$

2 стрелка 15 залпов, $P(A)=p_1\cdot p_2\cdot k$

500 изделий, $p=0,002$

$\lambda=np=500\cdot 0,002=1$; повреждено 3 эл: $P(A)=\frac{e^{-1}\cdot 1^3}{3!}\approx 0,0613$

$P_t(k)=\frac{(\lambda t)^k\cdot e^{-\lambda t}}{k!}$

---

10 эл. T вер 0,05

$M(X)=np=0,5$

$DX=npq=0,475$

$P(|X-M(X)|<\varepsilon)\geq 1-D(X)/\varepsilon^2$

$\varepsilon=2$

$P(|X-0,5|<2)\geq 1-0,475/4=0,88$

отказов меньше двух

Чебышева формула.

примет значение в интервале

$F(x_2)-F(x_1)=$ вероятность

вер $\frac{1}{2}$, появление 40-60, 100 испытаний

$M(X)=100\cdot 0,5=50 \quad D(X)=100\cdot 0,5\cdot 0,5=25$

$\varepsilon=60-M(X)=10$

$P(|X-50|<10)\geq 1-\frac{25}{10^2}=0,75$

X	2	4	7
P	0,5	0,2	0,3

$x\leq 2 \quad F(x)=0$

$2<x\leq 4 \quad F(x)=0,5$

$4<x\leq 7 \quad F(x)=0,7$

$x>7 \quad F(x)=1$

$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leq 2\\ 0,5 & \text{при } 2<x\leq 4\\ 0,7 & \text{при } 4<x\leq 7\\ 1 & \text{при } x>7\end{cases}$

$P_n = n!$ скольно способов переставить n объектов

$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ скольними способами можно выбрать m из n объектов

$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ " " и в каждой выборке переставить их местами

"или" $\cup$ +; "и" $\cap$ $\cdot$

$P_n(\text{повтр}) = \frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot m_n!}$ кол. способов, которыми можно переставить n объектов

$C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m! \cdot (n-1)!}$ для выбора предложено n множеств; каждое состоит из одинаковых объектов

$A_n^m(\text{повтр}) = n^m$ скольно способов выбрать m объектов, если важен порядок в выборке их расположения

$P(A) = \frac{k}{n}$ классическая вероятность

$P(A) = P(A/H_1) \cdot P(H_1) + P(A/H_2) \cdot P(H_2)$ полная вероятность

$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ Бернулли

$P(A) = \frac{P(A/H_1) \cdot P(H_1)}{P(A)}$ Байеса

$P(A) = \frac{S_1}{S_2}$ геометр. вер.

$np - q \leq m_0 < np + p$

$m_x = p_1 \cdot x_1 + \ldots p_n \cdot x_n = \frac{a+b}{2} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = np$

$D_x = M(x^2) - (M(x))^2 = p_1 \cdot x_1^2 + \ldots + p_n \cdot x_n^2 - (x_1 p_1 + x_n p_n)^2 = npq =$
$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \frac{(b-a)^2}{12}$

$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \quad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

$\sigma(x) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}} = \sqrt{D_x}$

$\underset{\text{не отказ}}{R(t)} = e^{-\lambda t}$, $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ ← откажет (безотказная работа)

$P(X=k) = \frac{a^k}{k!} \cdot e^{-a}$, $a = \lambda = np = m_x$ закон редких явлений, Пуассона

$\int 0 dx = C$ $\quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg x$

$\int dx = x$ $\quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg x$

$\int \frac{dx}{x} = \ln|x|$ $\quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a}$

$\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ $\quad \int \frac{-dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a} \arccos \frac{x}{a}$

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$ $\quad \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a}$

$\int e^x dx = e^x$

$\int \sin x dx = -\cos x dx$ $\quad \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right|$

$\int \cos x dx = \sin x$

$\int x dx = \frac{x^2}{2}$ $\quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right|$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}$ $\quad \int u dv = uv - \int v du$

u, v - интеграл; vu, du - производ.

$G_n(x) = \prod_{k=1}^{n} (q_k + p_k \cdot x) = \sum_{m=0}^{n} P_{m,n} \cdot x^n$

$m_x = np$, $\sigma^2 = npq$, $a_x = \frac{q-p}{\sqrt{npq}}$, $e_x = \frac{1 - 6pq}{npq}$

$D_x = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2}$, $\delta_x = \frac{1}{\lambda}$

$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}$ попадание сл. величины в интервал, или $F(2) - F(1)$

$P(X=k) = \frac{C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}$ закон распределения.

$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$, $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$ лаплас

$P(|\frac{m}{n} - p| \leq \varepsilon) = 2\varphi(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}})$

$D_{const} = 0$

$y = ax + b$

$m_y = a \cdot m_x + b$